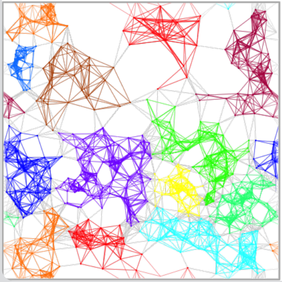
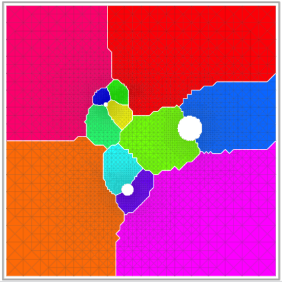
Karlsruher Institut für Technologie

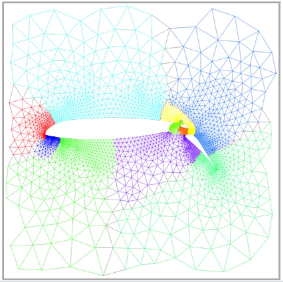
Algorithmische Methoden für schwere Optimierungsprobleme

Prof. Dr. Henning Meyerhenke

Institut für Theoretische Informatik







Vorlesung

Programm:

- Randomisiertes Max-SAT
- Max-SAT mit Metaheuristiken

Henning Meyerhenke, Institut für Theoretische Informatik

Wiederholung Rand-Max-SAT

Rand-Max-SAT: Werfe faire Münze für Belegung jeder einzelnen Variable

Corollary

Rand-Max-SAT hat für jede Boolesche (n, m)-Formel Φ mit mindestens k Literalen pro Klausel eine erwartete relative Güte von $\frac{1}{1-\frac{1}{2^k}}$.

Beobachtung

Gut bei großem k, "schlecht" bei kleinem k

Theorem (Chen, Friesen, Zhang 99)

Algorithmus Rand-Max-SAT garantiert für jede Boolesche (n, m)-Formel Φ eine erwartete relative Güte von $3/2$.

Arithmetisierung von Max-SAT

Notation

- $S_j^{\oplus}$: Menge der Variablen, die in C_j nicht negiert vorkommen
- $S_j^{\ominus}$: Menge der Variablen, die in C_j negiert vorkommen
- $\hat{x}_i$: $0-1$-Entscheidungsvariable zu x_i
- $\hat{Z}_j$: $0-1$-Entscheidungsvariable zu C_j (0 = false, 1 = true)

B:

$$\max \sum_{j=1}^{m} \hat{Z}_j \tag{1}$$

$$u.d.Nb. \sum_{x_i \in S_j^{\oplus}} \hat{x}_i + \sum_{x_i \in S_j^{\ominus}} (1 - \hat{x}_i) \geq \hat{Z}_j \tag{2}$$

$$\hat{x}_i, \hat{Z}_j \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \tag{3}$$

Henning Meyerhenke, Institut für Theoretische Informatik

Arithmetisierung von Max-SAT

Notation

- $S_j^{\oplus}$: Menge der Variablen, die in C_j nicht negiert vorkommen
- $S_j^{\ominus}$: Menge der Variablen, die in C_j negiert vorkommen
- $\hat{x}_i$: $0-1$-Entscheidungsvariable zu x_i
- $\hat{Z}_j$: $0-1$-Entscheidungsvariable zu C_j (0 = false, 1 = true)

B_{rel} (Austausch von Bedingungen zur Vereinfachung: Relaxation):

$$\max \sum_{j=1}^{m} \hat{Z}_j \tag{1}$$

$$u.d.Nb. \sum_{x_i \in S_j^{\oplus}} \hat{x}_i + \sum_{x_i \in S_j^{\ominus}} (1 - \hat{x}_i) \geq \hat{Z}_j \tag{2}$$

$$0 \leq \hat{x}_i, \hat{Z}_j \leq 1 \quad \forall i, j \tag{3}$$

Superoptimalität des LP

- Relaxation bewirkt: Lösungsraum wird größer
- LP-Löser: Standard-Software
- **Annahme:** Black Box, rationale Lösung der $\hat{x}_i$, $\hat{Z}_j$ bekannt
- Rationale Lösung mind. so gut wie, i.A. besser als die ganzzahlige

Beispiel

Siehe Tafel!

Superoptimalität

$\sum_{j=1}^{m} \hat{Z}_j = OPT(B_{rel}) \geq OPT(B) = OPT(\Phi)$

Henning Meyerhenke, Institut für Theoretische Informatik

Randomisiertes Runden

Von der rationalen zur ganzzahligen Lösung

Wie erhält man wieder eine für Max-SAT zulässige Lösung?

Vorschläge?

Randomisiertes Runden

Von der rationalen zur ganzzahligen Lösung

Wie erhält man wieder eine für Max-SAT zulässige Lösung?

Vorschläge?

function RANDOMIZEDROUNDING(π)
    for i := 1 to n **do**
$$x_i := \begin{cases} \textit{true} & \text{mit Wkt. } \pi(\hat{x}_i) \\ \textit{false} & \text{mit Wkt. } 1 - \pi(\hat{x}_i) \end{cases}$$
    end for
end function

Randomisiertes Runden

Von der rationalen zur ganzzahligen Lösung

Wie erhält man wieder eine für Max-SAT zulässige Lösung?

Vorschläge?

1: **function** RANDOMIZEDROUNDING(π)
2: **for** i := 1 to n **do**
3: $x_i := \begin{cases} \textit{true} & \text{mit Wkt. } \pi(\hat{x}_i) \\ \textit{false} & \text{mit Wkt. } 1 - \pi(\hat{x}_i) \end{cases}$
4: **end for**
5: **end function**

Im Folgenden: $\pi(x_i) = x_i$

Diskussion: Warum Randomisierung beim Runden?

Henning Meyerhenke, Institut für Theoretische Informatik

Kompletter Algorithmus für Max-SAT

Algorithmus RR-MAX-SAT:

1. Ermittle Lösung π des relaxierten lin. Optimierungsproblems B_{rel} zu Φ
2. Ermittle eine Belegung b mittels RANDOMIZEDROUNDING(π)

Kompletter Algorithmus für Max-SAT

Algorithmus RR-MAX-SAT:

1. Ermittle Lösung π des relaxierten lin. Optimierungsproblems B_{rel} zu Φ
2. Ermittle eine Belegung b mittels RANDOMIZEDROUNDING(π)

Beobachtung

- *Es gilt:* $\mathbb{P}[x_i = true] = \hat{x}_i$
- *Die Lösung des LP ist eng mit den Münzwürfen in 2.) verknüpft*
- ***Aber:*** *Jeder Münzwurf ist unabhängig von allen anderen!*

Analyse: Güte

KIT Karlsruher Institut für Technologie

Lemma

Sei k_j die Anzahl der Literale in C_j. Es gilt:

$$\mathbb{P}[C_j \textit{ wird durch } \text{RR-MAX-SAT} \textit{ erfüllt}] \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k_j}\right)^{k_j}\right) \cdot \hat{Z}_j$$

Henning Meyerhenke, Institut für Theoretische Informatik

Analyse: Güte

Lemma

Sei k_j die Anzahl der Literale in C_j. Es gilt:

$$\mathbb{P}[C_j \textit{ wird durch } \text{RR-Max-SAT} \textit{ erfüllt}] \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k_j}\right)^{k_j}\right) \cdot \hat{Z}_j$$

Theorem

Für jede Boolesche Formel Φ in KNF, in der jede Klausel höchstens *k Literale hat, ist*

$$\mathbb{E}[\textit{RR-Max-SAT}(\Phi)] \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k}\right) \cdot \textit{OPT}(\Phi)$$

Analyse: Güte (2)

Theorem

Für jede Boolesche Formel Φ in KNF, in der jede Klausel höchstens k Literale hat, ist

$$\mathbb{E}[\textit{RR-Max-SAT}(\Phi)] \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) \cdot \textit{OPT}(\Phi)$$

Wegen $1 - (1 - \frac{1}{k})^k \geq 1 - \frac{1}{e}$ für alle $k \in \mathbb{N}$:

Henning Meyerhenke, Institut für Theoretische Informatik

Analyse: Güte (2)

Theorem

Für jede Boolesche Formel Φ in KNF, in der jede Klausel höchstens k Literale hat, ist

$$\mathbb{E}[\mathit{RR\text{-}Max\text{-}SAT}(\Phi)] \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) \cdot \mathit{OPT}(\Phi)$$

Wegen $1 - (1 - \frac{1}{k})^k \geq 1 - \frac{1}{e}$ für alle $k \in \mathbb{N}$:

Corollary (Relative Güte)

Algorithmus RR-MAX-SAT *erfüllt mindestens* $(1 - \frac{1}{e}) \cdot \mathit{OPT}(\Phi)$ *viele Klauseln.*

Also hat der Algorithmus eine erw. relative Güte von $\frac{1}{(1-\frac{1}{e})} \approx 1.582$.

Andere Rundungswkt.: Relative Güte $4/3$

Zusammenfassung

- Einfacher randomisierter Algorithmus Rand-Max-SAT:
  - Literale werden unabhängig und gleichverteilt auf true oder false gesetzt
  - Hat gute relative Güte bei langen Klauseln

Zusammenfassung

- Einfacher randomisierter Algorithmus Rand-Max-SAT:
  - Literale werden unabhängig und gleichverteilt auf true oder false gesetzt
  - Hat gute relative Güte bei langen Klauseln
- Algorithmus RR-Max-SAT:
  - Arithmetisierung führt zu ILP
  - Relaxation führt zu LP
  - Lösung des LP wird randomisiert gerundet
  - Hat gute relative Güte bei kurzen Klauseln

Zusammenfassung

- Einfacher randomisierter Algorithmus Rand-Max-SAT:
  - Literale werden unabhängig und gleichverteilt auf true oder false gesetzt
  - Hat gute relative Güte bei langen Klauseln
- Algorithmus RR-Max-SAT:
  - Arithmetisierung führt zu ILP
  - Relaxation führt zu LP
  - Lösung des LP wird randomisiert gerundet
  - Hat gute relative Güte bei kurzen Klauseln
- **Ausblick:**
  - Kombination beider Verfahren (Übung!)
  - Metaheuristiken Tabu Search und ILS, angewandt auf SAT